

Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$

Tanguy Rivoal

Laboratoire SDAD, CNRS FRE 2271
Département de Mathématiques
Université de Caen, Campus II, BP 5186
14032 Caen Cédex, France

1 Introduction

Le Théorème 2 de [BR] montre qu'il existe un entier impair j tel que $5 \leq j \leq 169$ et 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} : ce résultat implique l'irrationalité de $\zeta(j)$ mais est bien sûr plus fort. Dans cet article, nous améliorons la majoration $j \leq 169$ en ne recherchant que l'irrationalité de $\zeta(j)$:

Théorème 1 *Il existe un entier impair j tel que $5 \leq j \leq 21$ et $\zeta(j) \notin \mathbb{Q}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur la série suivante

$$S_{n,a}(z) = n!^{a-6} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \left(t + \frac{n}{2} \right) \frac{(t-n)_n^3 (t+n+1)_n^3}{(t)_{n+1}^a} \right\}_{|t=k} z^{-k}$$

où z est un nombre complexe de module ≥ 1 et a un entier ≥ 6 .

L'étude de $S_{n,a}(z)$, que nous écrirons désormais $S_n(z)$, est similaire à celle de la série considérée dans [R] et [BR] :

- Le Lemme 1 montre que, si a est pair, la série $S_n(1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire (à coefficients rationnels) de 1 et des $\zeta(j)$ pour j impair, $j \in \{5, \dots, a+2\}$.
- Le Lemme 2 détermine un dénominateur commun aux coefficients de cette combinaison linéaire.
- L'estimation du comportement de $|S_n(1)|^{1/n}$ est délicate puisqu'une expression intégrale de type Beukers [Be] n'est pas connue pour $S_n(1)$. Néanmoins, en suivant Nesterenko [Ne], le Lemme 4 montre que $S_n(1)$ peut s'écrire comme la partie réelle d'une intégrale complexe : le comportement asymptotique de cette intégrale est alors déterminé au Lemme 5 par la méthode du col (Lemme 3).
- Enfin, il n'y a pas lieu ici de borner la hauteur des coefficients de la combinaison : cela n'est nécessaire que pour l'indépendance linéaire.

Remerciements L'auteur tient à remercier F. Amoroso et D. Essouabri pour leurs conseils qui ont permis d'améliorer une précédente version.

2 Résultats auxiliaires

Posons

$$R_n(t) = n!^{a-6} \left(t + \frac{n}{2}\right) \frac{(t-n)_n^3 (t+n+1)_n^3}{(t)_{n+1}^a},$$

$D_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{d}{dt}\right)^\lambda$ et $c_{l,j,n} = D_{a-l}(R_n(t)(t+j)^a)|_{t=-j}$: on a alors la décomposition en éléments simples

$$R_n''(t) = \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n \frac{l(l-1)c_{l,j,n}}{(t+j)^{l+2}}. \quad (1)$$

Définissons également les polynômes à coefficients rationnels

$$P_{0,n}(z) = - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{l(l-1)c_{l,j,n}}{2k^{l+2}} z^{j-k} \quad \text{et} \quad P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j. \quad (2)$$

où $l \in \{1, \dots, a\}$

Lemme 1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, on a

$$S_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^a \frac{l(l-1)}{2} P_{l,n}(z) \text{Li}_{l+2}(1/z)$$

et $P_{1,n}(1) = 0$. De plus, si a est pair, alors pour tout $n \geq 0$ et pour tout entier pair $l \in \{2, \dots, a\}$, on a $P_{l,n}(1) = 0$ et donc

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{j=2}^{a/2} j(2j-1) P_{2j-1,n}(1) \zeta(2j+1) .$$

Démonstration

De la décomposition (1) de $R_n(t)$, on déduit que si $|z| > 1$

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n \frac{l(l-1)c_{l,j,n}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^{l+2}} \\ &= \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n \frac{l(l-1)c_{l,j,n}}{2} z^j \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{l+2}} z^{-k} - \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^{l+2}} z^{-k} \right) \\ &= P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^a \frac{l(l-1)}{2} P_{l,n}(z) \text{Li}_{l+2}(1/z) . \end{aligned}$$

Comme le degré total de la fraction rationnelle $R_n(t)$ est ≤ -2 , on a

$$P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^n \text{Res}_{t=-j}(R_n(t)) = 0 .$$

On peut réécrire $c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}(\Phi_{n,j}(x))|_{x=j}$ où

$$\Phi_{n,j}(x) = n!^{a-6} \left(\frac{n}{2} - x \right) \frac{(-x-n)_n (-x+n+1)_n}{(-x)_{n+1}^a} (j-x)^a .$$

On a

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-6} \left(x - \frac{n}{2} \right) \frac{(x-2n)_n (x+1)_n}{(x-n)_{n+1}^a} (x-j)^a . \quad (3)$$

En appliquant l'identité $(\alpha)_l = (-1)^l(-\alpha - l + 1)_l$ aux trois symboles de Pochhammer de (3), on obtient

$$\begin{aligned} & \Phi_{n,n-j}(n-x) \\ &= -n!^{a-6} \left(\frac{n}{2} - x \right) \frac{(-1)^n(-x+n+1)_n(-1)^n(-x-n)_n}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a} (-1)^a(j-x)^a \\ &= (-1)^{na+1} \Phi_{n,j}(x) . \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$,

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^{k+na+1} \Phi_{n,j}^{(k)}(x) .$$

En particulier, avec $k = a - l$ et $x = j$, on a

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a(n+1)+l+1} c_{l,j,n} ,$$

ce qui implique la relation

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l+1} P_{l,n}(1) .$$

Si $(n+1)a + l$ est pair, on en déduit que $P_{l,n}(1) = 0$.

Lemme 2 Pour tout $l \in \{1, \dots, a\}$ on a

$$2d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z] \quad \text{et} \quad 2d_n^{a+2} P_{0,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$$

où $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$.

Démonstration

On écrit $R_n(t)(t+j)^a = F(t)^3 \times G(t)^3 \times H(t)^{a-6} \times I(t)$ où $I(t) = t + n/2$ et

$$F(t) = \frac{(t-n)_n}{(t)_{n+1}}(t+j), \quad G(t) = \frac{(t+n+1)_n}{(t)_{n+1}}(t+j), \quad H(t) = \frac{n!}{(t)_{n+1}}(t+j) .$$

Décomposons $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{j-p}{t+p} f_p, \quad G(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{j-p}{t+p} g_p, \quad H(t) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{j-p}{t+p} h_p$$

où

$$f_p = \frac{(-p-n)_n}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^n (-p+h)} = \frac{(-1)^n (p+1)_n}{(-1)^p p! (n-p)!} = (-1)^{n-p} \binom{n+p}{n} \binom{n}{p} \in \mathbb{Z},$$

$$g_p = \frac{(-p+n+1)_n}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^n (-p+h)} = \frac{(-1)^p (2n-p)!}{(n-p)! p! (n-p)!} = (-1)^p \binom{2n-p}{n} \binom{n}{p} \in \mathbb{Z}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^n (-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p! (n-p)!} = (-1)^p \binom{n}{p} \in \mathbb{Z}.$$

On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F(t))|_{t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{j-p}{(p-j)^{\lambda+1}} f_p,$$

$$(D_\lambda G(t))|_{t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{j-p}{(p-j)^{\lambda+1}} g_p,$$

$$(D_\lambda H(t))|_{t=-j} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{j-p}{(p-j)^{\lambda+1}} h_p$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que

$$d_n^\lambda(D_\lambda F)|_{t=-j}, \quad d_n^\lambda(D_\lambda G)|_{t=-j} \quad \text{et} \quad d_n^\lambda(D_\lambda H)|_{t=-j}$$

sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. De plus, $2(D_\lambda I)|_{t=-j} \in \mathbb{Z}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j)^a) = \sum_{\mu} (D_{\mu_1} F)(D_{\mu_2} F)(D_{\mu_3} F) \\ \times (D_{\mu_4} G)(D_{\mu_5} G)(D_{\mu_6} G)(D_{\mu_7} H) \cdots (D_{\mu_a} H)(D_{\mu_{a+1}} I)$$

(où la somme est sur les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^{a+1}$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_{a+1} = a-l$), on en déduit alors que $2d_n^{a-l} c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$. Les expressions (2) des polynômes $P_{0,n}(z)$ et $P_{l,n}(z)$ permettent de conclure.

3 Démonstration du Théorème 1

Pour estimer $S_n(1)$, nous suivons la démarche utilisée par [Ne] et [HP] qui consiste à exprimer $S_n(1)$ à l'aide d'une intégrale complexe à laquelle on peut appliquer la méthode du col, méthode dont nous rappelons tout d'abord le principe (voir par exemple [Co], pp. 91-94 ou [Di], pp. 279-285)).

Soit w une fonction analytique au voisinage d'un point z_0 . On appelle chemin de descente de $\operatorname{Re}(w)$ en z_0 tout chemin du plan issu de z_0 et le long duquel $\operatorname{Re}(w(z))$ est strictement décroissante quand z s'éloigne de z_0 . Les chemins de plus grande descente de $\operatorname{Re}(w)$ en z_0 sont les chemins tels que $\operatorname{Re}(w)$ a (localement) la décroissance la plus rapide parmi tous les chemins de descente : il est en fait équivalent de demander que $\operatorname{Im}(w)$ soit constante le long de ces chemins, c'est à dire que la phase de e^w soit stationnaire.

Supposons w telle que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) = |w''(z_0)|e^{i\alpha_0} \neq 0$. Notons θ la direction d'une droite Δ passant par z_0 , c'est-à-dire $\theta = \arg(z - z_0)$ où $z \in \Delta$. Il existe exactement deux chemins de plus grande descente de $\operatorname{Re}(w)$ en z_0 , dont les directions des tangentes en z_0 sont $\theta_+ = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}$ et $\theta_- = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}$: ces directions *critiques* sont opposées. Il peut s'avérer difficile de déterminer exactement les chemins de plus grande descente. On peut s'affranchir de ce problème en considérant n'importe quelle direction θ en z_0 telle que $\cos(\alpha_0 + 2\theta) < 0$: au voisinage de z_0 ,

$$w(z) = w(z_0) + \frac{1}{2}w''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$

et sur un chemin L dont les deux directions en z_0 vérifient la condition ci-dessus, on a alors $\operatorname{Re}(\frac{1}{2}w''(z_0)(z - z_0)^2) < 0$ et $\operatorname{Re}(w)$ admet un maximum local en z_0 le long de L . Convenons de dire qu'un chemin L est *admissible* en z_0 si les deux directions θ en z_0 vérifient $\cos(\alpha_0 + 2\theta) < 0$ et si $\operatorname{Re}(w(z_0))$ est le maximum *global* de $\operatorname{Re}(w)$ le long de L .

Lemme 3 (Méthode du col) *Soit g et w deux fonctions analytiques dans un ouvert simplement connexe \mathcal{D} du plan. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathcal{D}$ tel que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) = |w''(z_0)|e^{i\alpha_0} \neq 0$. Si L est un chemin inclus dans*

\mathcal{D} et admissible en z_0 , alors

$$\int_L g(z) e^{nw(z)} dz \sim g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{n|w''(z_0)|}} e^{i(\pm\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2})} e^{nw(z_0)} \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (4)$$

où le choix de \pm dépend de l'orientation de L . De plus, cette estimation est encore valable si L est un chemin que l'on peut déformer en un chemin admissible en z_0 .

Nous appliquons maintenant cette méthode à l'estimation asymptotique de $S_n(1)$. Considérons l'intégrale complexe

$$J_n(u) = \frac{n}{2i\pi} \int_L R_n(nz) \left(\frac{\pi}{\sin(n\pi z)} \right)^3 e^{nuz} dz$$

où u est un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(u) \leq 0$ et $|\operatorname{Im}(u)| \leq 3\pi$, L est une droite verticale orientée de $+i\infty$ à $-i\infty$ et contenue dans la bande $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, ce qui assure que l'intégrale $J_n(u)$ converge.

Lemme 4 Dans ces conditions, on a

i)

$$J_n(u) = \frac{(-1)^n n^2}{2i\pi} n!^{a-6} \times \int_L \left(z + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(nz)^{a+3} \Gamma(n - nz + 1)^3 \Gamma(nz + 2n + 1)^3}{\Gamma(nz + n + 1)^{a+3}} e^{nuz} dz .$$

ii)

$$S_n(1) = \operatorname{Re} (J_n(i\pi)) .$$

Démonstration

i) Comme $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$ et $(t - n)_n^3 = (-1)^n (1 - t)_n^3$, on a

$$\begin{aligned} R_n(t) &= (-1)^n n!^{a-6} \left(t + \frac{n}{2} \right) \frac{(1 - t)_n^3 (t + n + 1)_n^3}{(t)_{n+1}^a} \\ &= (-1)^n n!^{a-6} \left(t + \frac{n}{2} \right) \frac{\Gamma(n - t + 1)^3 \Gamma(t + 2n + 1)^3 \Gamma(t)^a}{\Gamma(1 - t)^3 \Gamma(t + n + 1)^3 \Gamma(t + n + 1)^a} . \end{aligned}$$

De plus, la formule des compléments $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \pi/\sin(\pi t)$ (pour $t \notin \mathbb{Z}$) implique que

$$R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin \pi t} \right)^3 = (-1)^n n!^{a-6} \left(t + \frac{n}{2} \right) \frac{\Gamma(t)^{a+3} \Gamma(n-t+1)^3 \Gamma(t+2n+1)^3}{\Gamma(t+n+1)^{a+3}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{L'} R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin(\pi t)} \right)^3 e^{ut} dt \\ = (-1)^n n!^{a-6} \int_{L'} \left(t + \frac{n}{2} \right) \frac{\Gamma(t)^{a+3} \Gamma(n-t+1)^3 \Gamma(t+2n+1)^3}{\Gamma(t+n+1)^{a+3}} e^{ut} dt \end{aligned}$$

où L' est une droite verticale quelconque contenue dans $0 < \operatorname{Re}(t) < n$. Le changement de variable $t = nz$ et le théorème de Cauchy justifient que

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \frac{(-1)^n n^2}{2i\pi} n!^{a-6} \\ &\times \int_L \left(z + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(nz)^{a+3} \Gamma(n-nz+1)^3 \Gamma(nz+2n+1)^3}{\Gamma(nz+n+1)^{a+3}} e^{nuz} dz. \end{aligned}$$

ii) Soit $c \in]0, n[$ et soit $T \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ tel que $T > n+1$. Considérons le contour rectangulaire \mathcal{R}_T orienté dans le sens direct, de sommets $c \pm iT$ et $T \pm iT$: la fonction $F(t, u) = R_n(t)(\pi/\sin(\pi t))^3 e^{ut}$ est méromorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(t) > 0$ et ses pôles sont les entiers $k \geq n+1$. En appliquant le théorème des résidus, il découle que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}_T} F(t, u) dt = \sum_{k=n+1}^{[T]} \operatorname{Res}_{t=k}(F(t, u)).$$

où

$$\operatorname{Res}_{t=k}(F(t, u)) = \frac{\pi^2 + u^2}{2} R_n(k) (-e^u)^k + u R'_n(k) (-e^u)^k + \frac{1}{2} R''_n(k) (-e^u)^k.$$

Sur les trois côtés $[c - iT, T - iT]$, $[T - iT, T + iT]$ et $[T + iT, c + iT]$, on a $R_n(t) = O(T^{-2})$.

Sur $[T - iT, T + iT]$, en posant $t = T + iy$, on a

$$\sin(\pi t) = (-1)^N \cosh(\pi y)$$

et donc $|\sin(\pi t)| \geq \frac{1}{2}e^{\pi|y|}$. Comme $|e^{ut}| = e^{\operatorname{Re}(u)T - \operatorname{Im}(u)y}$, on en déduit que

$$R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin(\pi t)} \right)^3 e^{ut} = O\left(T^{-2} e^{\operatorname{Re}(u)T} e^{-(\operatorname{Im}(u)y + 3\pi|y|)}\right) = O\left(T^{-2}\right)$$

puisque $\operatorname{Re}(u) \leq 0$ et $|\operatorname{Im}(u)| \leq 3\pi$.

De façon similaire, sur les deux côtés $[c - iT, T - iT]$ et $[T + iT, c + iT]$, en posant $t = x \pm iT$ avec $x > 0$, on a

$$2i \sin(\pi t) = e^{\mp \pi T} e^{i\pi x} - e^{\pm \pi T} e^{-i\pi x}$$

et donc $|\sin(\pi t)| \geq |\sinh(\pi T)| \gg e^{\pi T}$. Comme $|e^{ut}| = e^{\operatorname{Re}(u)x - \operatorname{Im}(u)T}$, on en déduit que

$$R_n(t) \left(\frac{\pi}{\sin(\pi t)} \right)^3 e^{ut} = O\left(T^{-2} e^{\operatorname{Re}(u)x} e^{-(\operatorname{Im}(u)T + 3\pi T)}\right) = O\left(T^{-2}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} F(t, u) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{R}_T} F(t, u) dt \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \operatorname{Res}_{t=k}(F(t, u)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\pi^2 + u^2}{2} R_n(k) (-e^u)^k + u R'_n(k) (-e^u)^k + \frac{1}{2} R''_n(k) (-e^u)^k \right). \end{aligned}$$

En particulier,

$$J_n(i\pi) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(i\pi R'_n(k) + \frac{1}{2} R''_n(k) \right)$$

et donc $S_n(1) = \operatorname{Re}(J_n(i\pi))$.

Nous utilisons maintenant la formule de Stirling sous la forme suivante

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e} \right)^z \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|} \right) \right)$$

où $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(z)| < \pi$ et où les fonctions \sqrt{z} et $z^z = e^{z \log(z)}$ sont définies avec la détermination principale du logarithme. Sur la droite L , les quantités $|nz|$, $|n - nz + 1|$, $|nz + 2n + 1|$ et $|nz + n + 1|$ sont équivalentes à des multiples constants de n , d'où

$$J_n(i\pi) = i(-1)^{n+1}(2\pi)^{\frac{a}{2}-1}n^{\frac{a}{2}-4} \int_L g(z) e^{nw(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) dz \quad (5)$$

avec

$$g(z) = \frac{\sqrt{z+1}^{a+3}}{\sqrt{z}^{a+3} \sqrt{1-z}^3 \sqrt{z+2}^3}$$

et

$$\begin{aligned} w(z) = & (a+3)z \log(z) - (a+3)(z+1) \log(z+1) \\ & + 3(1-z) \log(1-z) + 3(z+2) \log(z+2) + i\pi z, \end{aligned}$$

les différentes fonctions racines et logarithmes de g et w étant de nouveau définies à l'aide de la détermination principale du logarithme. L'expression (5) de $J_n(i\pi)$ se prête maintenant à une estimation par la méthode du col.

Dorénavant, nous supposons $a = 20$. Alors

$$w'(z) = 23 \log(z) - 23 \log(z+1) + 3 \log(z+2) - 3 \log(1-z) + i\pi$$

et l'équation $w'(z) = 0$ possède une seule solution z_0 vérifiant $0 < \operatorname{Re}(z_0) < 1$:

$$z_0 = x_0 + i y_0 \approx 0,9922341203 - i 0,01200539829.$$

On a

$$w(z_0) \approx -22,02001640 + i 3,104408624$$

et

$$w''(z_0) \approx 216,7641546 e^{-i 0.9471277165}.$$

On constate que $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$ vérifient $\cos(\alpha_0 + 2\theta) < 0$. Montrons que la droite $L : \operatorname{Re}(z) = x_0$ est admissible, c'est à dire que $\operatorname{Re}(w)$ admet un maximum global en z_0 le long de L . Posons $f(y) = \frac{\partial \operatorname{Re}(w)}{\partial y}(x_0 + iy)$; donc

$$\begin{aligned} f(y) &= -\operatorname{Im}(w')(x_0 + iy) \\ &= -23 \arg(x_0 + iy) + 23 \arg(x_0 + 1 + iy) \\ &\quad - 3 \arg(x_0 + 2 + iy) + 3 \arg(1 - x_0 - iy) - \pi. \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 2\pi \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = -4\pi .$$

Par ailleurs, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$ pour $\operatorname{Re}(z) > 0$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{df}{dy} &= -\frac{23x_0}{x_0^2 + y^2} + \frac{23(x_0 + 1)}{(x_0 + 1)^2 + y^2} - \frac{3(x_0 + 2)}{(x_0 + 2)^2 + y^2} - \frac{3(1 - x_0)}{(1 - x_0)^2 + y^2} \\ &= \frac{N(y^2)}{(x_0^2 + y^2)((x_0 + 1)^2 + y^2)((x_0 + 2)^2 + y^2)((1 - x_0)^2 + y^2)} , \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\begin{aligned} N(t) &= 14t^3 + 2(7x_0^2 + 7x_0 + 44)t^2 + 2(-7x_0^4 - 14x_0^3 - 124x_0^2 - 117x_0 + 37)t \\ &\quad + 2(-7x_0^5 - 21x_0^4 + 16x_0^3 + 67x_0^2 - 9)x_0 . \end{aligned}$$

On vérifie que $N(t)$ a une seule racine dans $[0, +\infty[$. Donc $f(y)$ ne s'annule que pour $y = y_0$. La fonction $y \rightarrow \operatorname{Re}(w(x_0 + iy))$ est donc strictement croissante sur $] -\infty, y_0]$, puis strictement décroissante sur $[y_0, +\infty[$. En conséquence, la droite $L : \operatorname{Re}(z) = x_0$ est admissible en z_0 pour $\operatorname{Re}(w)$.

Lemme 5 *On a :*

$$J_n(i\pi) \sim c_0(-1)^{n+1}n^{11/2}e^{nw(z_0)} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

où $c_0 = g(z_0)(2\pi)^{19}\sqrt{2\pi/|w''(z_0)|}e^{-i\alpha_0/2} \neq 0$. De plus, il existe une suite d'entiers $\varphi(n)$ telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |S_{\varphi(n)}(1)|^{1/\varphi(n)} = e^{\operatorname{Re}(w(z_0))}$$

Démonstration

L'estimation de $J_n(i\pi)$ résulte de l'estimation générale (4), appliquée à (5) et à la droite admissible $L : \operatorname{Re}(z) = x_0$. Pour montrer la dernière affirmation, notons $c_0 = r e^{i\beta}$ et $v_0 = \operatorname{Im}(w(z_0))$, de sorte que

$$\begin{aligned} S_n(1) &= \operatorname{Re}(J_n(i\pi)) \\ &= r(-1)^{n+1}n^{11/2}e^{n\operatorname{Re}(w(z_0))}(\operatorname{Re}(u_n)\cos(nv_0 + \beta) - \operatorname{Im}(u_n)\sin(nv_0 + \beta)) \end{aligned}$$

où u_n est une suite de nombres complexes qui converge vers 1. Remarquons que $v_0 \approx 3,104$ n'est pas un multiple entier de π et donc il existe une suite d'entiers $\varphi(n)$ telle que $\cos(\varphi(n)v_0 + \beta)$ converge vers une limite $l \neq 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\operatorname{Re}(u_{\varphi(n)}) \cos(\varphi(n)v_0 + \beta) - \operatorname{Im}(u_{\varphi(n)}) \sin(\varphi(n)v_0 + \beta)) = l \neq 0$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_{\varphi(n)}(1)|^{1/\varphi(n)} = e^{\operatorname{Re}(w(z_0))} .$$

Démonstration du Théorème 1

Posons $p_{0,n} = 2d_n^{22}P_{0,n}(1)$ et $p_{l,n} = 2l(2l-1)d_n^{22}P_{2l-1,n}(1)$ pour $l \in \{2, \dots, 10\}$: le Lemme 2 implique que ce sont des entiers. Définissons également $\ell_n = 2d_n^{22}S_n(1)$: le Lemme 1 montre que

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=2}^{10} p_{l,n} \zeta(2l+1) .$$

Enfin, d'après le Théorème des nombres premiers, $d_n = e^{n+o(n)}$. Le Lemme 5 montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\ell_{\varphi(n)}|^{1/\varphi(n)} \approx e^{-0,02} \in]0, 1[,$$

ce qui prouve le Théorème 1.

Références

[BR] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, soumis.

[Be] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* , Bull. Lond. Math. Soc. **11**, no. 33, 268-272 (1978).

[Co] E. T. Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge University Press (1967).

[Di] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Collection "Méthodes", Hermann (1980).

[HP] T. G. Hessami Pilerhood, *Linear independence of vectors with polylogarithmic coordinates*, Mosc. Univ. Math. Bull. **54**, no. 6, 40-42 (1999).

[Ne] Yu.V. Nesterenko, *A few remarks on $\zeta(3)$* , Math. Notes, **59**, no. 6, 625-636 (1996).

[R] T. Rivoal, *La fonction Zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris **331**, 267-270 (2000).